ÜBER DEN

ORT DER DURCHSCHNITTSPUNKTE DER POLAREN

UND ÜBER DIE

ENVELOPPE DER VERBINDUNGSLINIEN DER POLE

VON PUNKTEN, RESP. TANGENTEN EINER GEGEBENEN CURVE

IN BEZUG AUF

EIN KEGELSCHNITTBÜSCHEL, RESP. EINE KEGELSCHNITTSCHAAR.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät zu Marburg

vorgelegt von

Eduard Hoffmann

aus Wiesbaden.

Marburg.

Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).

1884.

§ 1.

Allgemeine Gleichung in Punkt- und Geradencoordinaten.

Wenn drei feste gerade Linien in einer Ebene durch die symbolischen Gleichungen

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 0$$

dargestellt werden, so repräsentirt bekanntlich die Gleichung 2ten Grades

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha\gamma + E\beta\gamma + F\gamma^2 = 0$$

irgend einen Kegelschnitt in der Ebene der drei festen Geraden. Diese Gleichung hat vor derjenigen in Cartesischen Coordinaten

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

den grossen Vorzug der Homogeneität. Um die Gleichung in Cartesischen Coordinaten ebenfalls homogen zu machen, muss man eine Lineareinheit z durch die Substitution $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ für x und y einführen. Die Gleichung lautet dann

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist ein specieller Fall der obigen homogenen, denn man hat nur die Fundamentallinien

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

zur x-, resp. y-Axe zu machen, während man die dritte $\gamma = 0$ als in unendlicher Entfernung gelegen voraussetzt. Bekanntlich ist $Const = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Geraden. Sind die Gleichungen der drei Fundamentallinien in der Normal-

form vorausgesetzt, so ist das Resultat der Substitution der Coordinaten eines beliebigen Punktes in die Gleichung einer dieser Geraden der Werth für den Abstand des Punktes von derselben. Wir können somit in der Gleichung des Kegelschnitts die Grössen α, β, γ als die Variablen betrachten und verstehen darunter die Abstände eines Punktes der Curve von den drei Fundamentallinien.

Wenn zwei Kegelschnitte durch ihre Gleichungen

$$S_1 = 0 \quad S_2 = 0$$

gegeben sind, so repräsentirt die Gleichung

$$S_1 + k S_2 = 0$$

einen Kegelschnitt, der durch die vier Schnittpunkte der beiden gegebenen Kegelschnitte hindurchgeht; denn die Coordinaten der Schnittpunkte befriedigen sowohl $S_1 = 0$, als $S_2 = 0$, somit auch $S_1 + k S_2 = 0$. Die letztere Gleichung repräsentirt daher die Gesammtheit der Kegelschnitte, welche durch vier Punkte hindurchgehen.

Sind α_1, β_1, γ_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Ebene des Kegelschnitts, so lässt sich leicht nachweisen, dass die Polaren dieses Punktes in Bezug auf diejenigen Kegelschnitte, welche durch 4 feste Punkte gehen, sich sämmtlich in ein und demselben Punkte schneiden. Die Gleichung der Polare des Punktes α_1, γ_1, γ_1 in Bezug auf einen Kegelschnitt $S = 0$ lautet nämlich

$$\frac{dS}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{dS}{d\beta}\beta_1 + \frac{dS}{d\gamma}\gamma_1 = 0.$$

Für irgend ein Individuum des Kegelschnittbüschels

$$S_1 + k S_2 = 0$$

wird demnach die Polare die Gleichung haben

$$\frac{d(S_1+kS_2)}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{d(S_1+kS_2)}{d\beta}\beta_1 + \frac{d(S_1+kS_2)}{d\gamma}\gamma_1 = 0$$

oder

$$\frac{dS_1}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{dS_1}{d\beta}\beta_1 + \frac{dS_1}{d\gamma}\gamma_1 + k\left(\frac{dS_2}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{dS_2}{d\beta}\beta_1 + \frac{dS_2}{d\gamma}\gamma_1\right) = 0.$$

Diese Gleichung enthält die unbestimmte Grösse k nur im ersten Grade und stellt somit eine Gerade dar, die durch einen festen Punkt geht, und zwar durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$\frac{dS_1}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{dS_1}{d\beta}\beta_1 + \frac{dS_1}{d\gamma}\gamma_1 = 0$$

$$\frac{dS_2}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{dS_2}{d\beta}\beta_1 + \frac{dS_2}{d\gamma}\gamma_1 = 0.$$

Es sind die Polaren des Punktes α_1, β_1, γ_1 in Bezug auf die beiden Grundkegelschnitte S_1 und S_2.

Lassen wir den Punkt α_1, β_1, γ_1 sich längs einer Curve (Leitcurve) bewegen, so wird demselben in jeder Lage ein anderer Durchschnittspunkt der Polaren in Bezug auf das Kegelschnittbüschel entsprechen. Der Ort dieser Durchschnittspunkte der Polaren soll ermittelt werden. Wenn die Leitcurve die Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

hat, so wird die gesuchte Curve durch Elimination von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ aus den drei homogenen Gleichungen

$$\frac{dS_1}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{dS_1}{d\beta}\beta_1 + \frac{dS_1}{d\gamma}\gamma_1 = 0$$

$$\frac{dS_2}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{dS_2}{d\beta}\beta_1 + \frac{dS_2}{d\gamma}\gamma_1 = 0$$

$$F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 0$$

zu ermitteln sein.

Diesen Untersuchungen in Punktcoordinaten stellen wir zunächst solche in Geradencoordinaten gegenüber. Bekanntlich werden in einem Liniencoordinatensysteme drei feste Punkte angenommen, und eine Gerade wird bestimmt durch ihre Abstände von diesen drei festen Punkten. Es seien wieder α, β, γ diese Abstände, also die Coordinaten einer Geraden, so ist

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

die Gleichung einer Curve, welche von dieser beweglichen Geraden eingehüllt wird. Ist die Gleichung vom zweiten Grade, so stellt sie einen Kegelschnitt dar. Sind

$$S_1 = 0 \quad S_2 = 0$$

die Gleichungen von zwei Kegelschnitten, so repräsentirt die Gleichung

$$S_1 + k S_2 = 0$$

die Gesammtheit der Kegelschnitte, welche 4 feste Geraden berühren. Analog dem früheren lautet, wenn eine Gerade durch ihre Coordinaten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ gegeben ist, die Gleichung des Pols dieser Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt $S = 0$

$$\frac{dS}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{dS}{d\beta}\beta_1 + \frac{dS}{d\gamma}\gamma_1 = 0.$$

Genau so wie vorher lässt sich dann darthun, dass die Pole einer beliebigen Geraden in Bezug auf die Schaar von Kegelschnitten, welche 4 feste Geraden berühren, wieder auf einer festen Geraden liegen müssen. Lassen wir nun die gegebene Gerade eine Curve $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ umhüllen, so wird die Gerade, auf welcher die Pole in Bezug auf die Schaar der Kegelschnitte liegen, ebenfalls eine Curve umhüllen. Die Gleichung dieser Curve wird ermittelt, wenn man aus den drei homogenen Gleichungen

$$\frac{dS_1}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{dS_1}{d\beta}\beta_1 + \frac{dS_1}{d\gamma}\gamma_1 = 0$$

$$\frac{dS_2}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{dS_2}{d\alpha}\beta_1 + \frac{dS_2}{d\gamma}\gamma_1 = 0$$

$$F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$$

die Grössen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ eliminirt. Ist die Leitcurve wieder ein Kegelschnitt, so wird sowohl für Punkt- als Geradencoordinaten die Gleichung der gesuchten Curve vom 4ten Grade sein.

§ 2.

Degeneration der Kegelschnitte. Constructionen.

1. Punktcoordinaten.

Wenn einer der Kegelschnitte $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ des Kegelschnittbüschels $S_1 + k S_2 = 0$ zu zwei Geraden $\alpha = 0$, $\beta = 0$ degenerirt, so repräsentirt die Gleichung

$$S + k\alpha\beta = 0$$

die Gesammtheit der Kegelschnitte, welche durch die 4 Schnittpunkte der beiden Geraden α, β mit dem gegebenen Kegelschnitt S hindurchgehen. Betrachten wir die Geraden α, β als zwei von den drei Seiten eines Fundamentaldreiecks, so lautet die Gleichung der Polaren eines beliebigen Punktes m: α_1, β_1, γ_1 (Fig. 1) in Bezug auf ein Individuum des Systems:

$$\frac{d(S+k\alpha\beta)}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{d(S+k\alpha\beta)}{d\beta}\beta_1 + \frac{d(S+k\alpha\beta)}{d\gamma}\gamma_1 = 0.$$

oder

$$\frac{dS}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{dS}{d\beta}\beta_1 + \frac{dS}{d\gamma}\gamma_1 + k(\beta\alpha_1 + \alpha\beta_1) = 0.$$

Die Polaren des gegebenen Punktes in Bezug auf die Gesammtheit der Kegelschnitte schneiden sich demnach in einem Punkte, der durch die beiden Geraden

$$\frac{dS}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{dS}{d\beta}\beta_1 + \frac{dS}{d\gamma}\gamma_1 = 0.$$

$$\beta_1\alpha + \alpha_1\beta = 0$$

bestimmt ist. Die erstere dieser beiden Gleichungen stellt die Polare des gegebenen Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt S dar, die letztere Gleichung eine Gerade, die durch den Schnittpunkt der beiden Fundamentallinien α, β geht. Die Gerade, welche durch diesen Schnittpunkt und den gegebenen Punkt selbst geht, hat zur Gleichung

$$\beta_1\alpha - \alpha_1\beta = 0.$$

Die beiden Linien

$$\beta_1 \alpha + \alpha_1 \beta = 0$$
$$\beta_1 \alpha - \alpha_1 \beta = 0$$

sind aber das eine Paar conjugierter harmonischer Strahlen, wenn α und β das andere Paar sind. Für den Schnittpunkt der Polaren erhält man somit folgende Construction: Man verbindet den gegebenen Punkt mit dem Schnittpunkte der Geraden α, β und sucht zu dieser Verbindungslinie und den beiden Geraden α, β den 4ten harmonischen Strahl. Derselbe schneidet die Polare des gegebenen Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt S in dem gesuchten Punkte.

Der Kegelschnitt S zerfalle ebenfalls in zwei Geraden. Die Gleichung

$$\alpha\beta + k\gamma\delta = 0$$

stellt dann die Gesammtheit der Kegelschnitte dar, welche durch die Schnittpunkte der 4 festen Geraden α, β, γ, δ gehen. Dabei sind α und β, sowie γ und δ gegenüberliegende Seiten. Wir fassen α, β, γ als die drei Seiten eines Fundamentaldreiecks auf. Es ist dann δ als eine Function von α, β, γ zu betrachten. Zu einem Punkte m: α_1, β_1, γ_1 (Fig. 2) erhält man als Gleichung der Polaren in Bezug auf ein Individuum des Systems:

$$\frac{d(\alpha\beta+k\gamma\delta)}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{d(\alpha\beta+k\gamma\delta)}{d\beta}\beta_1 + \frac{d(\alpha\beta+k\gamma\delta)}{d\gamma}\gamma_1 = 0$$

$$\left(\beta + k\gamma\frac{d\delta}{d\alpha}\right)\alpha_1 + \left(\alpha + k\gamma\frac{d\delta}{d\beta}\right)\beta_1 + k\left(\delta + \gamma\frac{d\delta}{d\gamma}\right)\gamma_1 = 0$$

$$\beta\alpha_1 + \alpha\beta_1 + k\left(\gamma\frac{d\delta}{d\alpha}\alpha_1 + \gamma\frac{d\delta}{d\beta}\beta_1 + \gamma\frac{d\delta}{d\gamma}\gamma_1 + \delta\gamma_1\right) = 0.$$

Der Durchschnittspunkt der Polaren wird demnach durch die beiden Geraden

$$\beta_1 \alpha + \alpha_1 \beta = 0$$
$$\gamma\frac{d\delta}{d\alpha}\alpha_1 + \gamma\frac{d\delta}{d\beta}\beta_1 + \gamma\frac{d\delta}{d\gamma}\gamma_1 + \delta\gamma_1 = 0$$

bestimmt. Die erstere dieser beiden Gleichungen stellt eine Gerade dar, welche durch den Schnittpunkt von α, β geht, und zwar ist sie der vierte harmonische Strahl zu den beiden

gegebenen Geraden α, β und der Verbindungslinie des Schnittpunktes derselben mit dem gegebenen Punkt. Denn die Verbindungslinie hat die Gleichung

$$\beta_1 \alpha - \alpha_1 \beta = 0.$$

Fassen wir nun die Geraden α, γ, δ als die drei Seiten eines Fundamentaldreiecks auf, so erhalten wir analog dem Vorhergehenden für die Gerade, auf welcher ebenfalls der Schnittpunkt der Polaren liegt, die Gleichung

$$\delta_1 \gamma + \gamma_1 \delta = 0.$$

Es ist dies der 4te harmonische Strahl zu den Geraden γ, δ und der Verbindungslinie des Schnittpunktes derselben mit dem gegebenen Punkt. Pür den Schnittpunkt der Polaren eines gegebenen Punktes in Bezug auf das Kegelschnittbüschel erhält man demnach folgende Construction: Man verbindet den gegebenen Punkt mit den beiden Schnittpunkten der gegenüberliegenden Seiten des Fundamentalvierecks und sucht zu jeder dieser Verbindungslinie und zu zwei gegenüberliegenden Seiten des Vierecks den vierten harmonischen Strahl. Der Schnittpunkt der beiden so ermittelten vierten harmonischen Strahlen ist der gesuchte Punkt.

Interessant ist noch der Fall, dass die Gleichung des Kegelschnittbüschels die Form

$$S + k\alpha^2 = 0$$

annimmt. Diese Gleichung repräsentirt die Gesammtheit der Kegelschnitte, welche den Kegelschnitt $S = 0$ in den Schnittpunkten der Geraden $\alpha = 0$ mit diesem Kegelschnitt berühren. Betrachten wir die Gerade $\alpha = 0$ als eine der drei Fundamentallinien, so wird der Schnittpunkt der Polaren eines beliebigen Punktes in Bezug auf das Kegelschnittbüschel durch die beiden Gleichungen

$$\frac{dS}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{dS}{d\beta}\beta_1 + \frac{dS}{d\gamma}\gamma_1 = 0$$

$$\alpha = 0$$

bestimmt, d. h. für jeden Punkt der Ebene des Kegelschnittbüschels liegt der Durchschnitt der Polaren in Bezug auf alle Kegelschnitte des erwähnten Büschels in der Berührungssehne.

Der Fall

$$\alpha\beta + k\gamma^2 = 0$$

ist nur ein specieller Fall von

$$S + k\gamma^2 = 0.$$

Die Linie γ enthält die Durchschnittspunkte der Polaren eines beliebigen Punktes die Ebene in Bezug auf das Kegelschnittbüschel.

2. Geradencoordinaten.

Den Betrachtungen über Gleichungen in Punktcoordinaten stellen wir wieder solche über Gleichungen in Geradencoordinaten gegenüber.

Wenn von der Kegelschnittschaar

$$S_1 + kS_2 = 0$$

der eine der Fundamentalkegelschnitte zu zwei Punkten degenerirt, so stellt die Gleichung

$$S + k\alpha\beta = 0$$

die Gesammtheit der Kegelschnitte dar, welche diejenigen 4 Tangenten berühren, die man von den Punkten α, β an den Kegelschnitt S ziehen kann. Da die weiteren Entwickelungen genau dieselben sind, wie früher, so geben wir nur das Endresultat an. Wenn eine Gerade die Coordinaten m: α_1, β_1, γ_1 (Fig. 3) hat, so wird die Gerade, auf welcher die Pole der gegebenen Geraden in Bezug auf die Kegelschnittschaar liegen, durch die Gleichungen

$$\frac{dS}{d\alpha}\alpha_1 + \frac{dS}{d\beta}\beta_1 + \frac{dS}{d\gamma}\gamma_1 = 0$$

$$\beta_1\alpha + \alpha_1\beta = 0$$

bestimmt. Erstere Gleichung stellt den Pol m der gegebenen Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt S dar, letztere den

vierten harmonischen Punkt zu den Punkten α, β und dem Schnittpunkte der Verbindungslinie $\alpha\beta$ mit der gegebenen Geraden. Die gerade Verbindung dieses vierten harmonischen Punktes mit dem Pole m ist die gesuchte Linie, auf welcher die Pole der gegebenen Geraden in Bezug auf die Kegelschnittschaar liegen.

Zerfällt jeder der beiden Kegelschnitte S_1 und S_2 in zwei Punkte, so stellt die Gleichung

$$\alpha\beta + k\gamma\delta = 0$$

die Gesammtheit der Kegelschnitte dar, welche von 4 festen Geraden berührt werden, und zwar sind α, β, γ, δ die Eckpunkte des von den Geraden gebildeten Vierseits. Dabei sind α und β, sowie γ und δ gegenüberliegende Ecken (Fig. 4). Die Pole einer gegebenen Geraden m in Bezug auf die Kegelschnittschaar liegen wieder auf einer Geraden, welche man folgendermaassen construiren kann: Zu den Punkten α, β und dem Schnittpunkte der Verbindungslinie $\alpha\beta$ mit der gegebenen Geraden sucht man den vierten harmonischen Punkt. Dasselbe geschieht mit den Punkten γ, δ und dem Schnittpunkt der Geraden $\gamma\delta$ mit der gegebenen Geraden. Die Verbindungslinie dieser beiden vierten harmonischen Punkte ist die gesuchte Gerade.

Nimmt die Gleichung für die Kegelschnittschaar die Form

$$S + k\alpha^2 = 0$$

an, so wird dadurch eine solche Schaar von Kegelschnitten repräsentirt, welche mit dem Kegelschnitt S eine doppelte Berührung eingehen. Dabei ist $\alpha = 0$ die Gleichung des Durchschnittspunktes der gemeinschaftlichen Tangenten. Diejenige Gerade, auf welcher die Pole einer gegebenen Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte der erwähnten Schaar liegen, geht dann durch den Durchschnittspunkt der beiden gemeinschaftlichen Tangenten.

§ 3.

Beziehungen zwischen den beiden Curvenarten.

Wenn ein Kegelschnitt S (Fig. 5) gegeben ist und man sucht für die Tangenten einer beliebigen anderen Curve s die Pole in Bezug auf den Kegelschnitt S, so bilden diese Pole eine Curve Σ, welche bekanntlich die reciproke Polare zu s genannt wird. Es sei p eine Tangente an s in dem Punkte $\mathfrak{p}'$ und ihr Pol in Bezug auf S sei $\mathfrak{p}$, so ist nach der Theorie der reciproken Polaren die Tangente an Σ in dem Punkte $\mathfrak{p}$ zugleich die Polare des Punktes $\mathfrak{p}'$ in Bezug auf den Kegelschnitt S. Dieser Eigenschaft verdanken die Curven s und Σ die Bezeichnung »reciproke Polaren«, weil die Curve s in derselben Art aus Σ abgeleitet werden kann, wie diese Curve aus der Curve s. Aus der Theorie der reciproken Polaren ist weiter bekannt, dass die reciproke Polare eines Kegelschnitts wieder ein Kegelschnitt ist.

Wir haben oben gesehen, dass die Ermittelung des Durchschnittspunktes der Polaren eines gegebenen Punktes in Bezug auf das Kegelschnittbüschel $S_1 + k S_2 = 0$ übereinstimmt mit der Ermittelung des Durchschnitts der Polaren in Bezug auf die Grundkegelschnitte S_1 und S_2. Dasselbe gilt über die Ermittelung der Verbindungslinie der Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnittschaar $S_1 + k S_2 = 0$. Wir stellen die nächsten Betrachtungen somit lediglich für zwei Kegelschnitte an und bemerken, dass die zu untersuchenden Curven als Erzeugniss des ganzen Kegelschnittbüschels zu betrachten sind, welches durch die beiden gegebenen Grundkegelschnitte formirt wird.

Construirt man zu der Tangente an einen Kegelschnitt S, welchen wir als Leitcurve annehmen wollen, die Pole in Bezug auf zwei andere Kegelschnitte S_1 und S_2, so ist die Verbindungslinie dieser Pole eine Tangente der fraglichen Curve. Für die

Gesammtheit der Tangenten von S entstehen in Bezug auf jeden der Kegelschnitte S_1 und S_2 als reciproke Polaren zwei Kegelschnitte Σ_1 und Σ_2. Die einer Tangente von S in Σ_1 und Σ_2 entsprechenden Punkte ergeben durch ihre gerade Verbindung eine Tangente der gesuchten Curve 4ter Classe. Dem Berührungspunkte einer Tangente von S entsprechen als Polaren je eine Tangente an Σ_1 und Σ_2, und zwar in den Punkten, welche die Pole der Tangente an S in Bezug auf die beiden Kegelschnitte S_1 und S_2 sind. Der Durchschnittspunkt dieser Tangenten ist ein Punkt der fraglichen Curve 4ter Ordnung.

Werden die reciproken Polaren Σ_1 und Σ_2 als bekannt vorausgesetzt, so lassen sich Curven beider Art folgendermassen construiren: Zu einem Punkte von S sucht man die entsprechenden Tangenten in Σ_1 und Σ_2, ihr Durchschnittspunkt ist ein Punkt der Curve 4ter Ordnung; verbindet man die Berührungspunkte der beiden Tangenten an Σ_1 und Σ_2, so ist diese Verbindungslinie eine Tangente an die Curve 4ter Classe.

Wir betrachten nun die Fälle, dass die Leitcurve in eine Gerade, resp. in einen Punkt übergeht. In beiden Fällen ist die Gleichung der gesuchten Curve aus den drei homogenen Gleichungen

$$\frac{dS_1}{d\alpha}\alpha_1+\frac{dS_1}{d\beta}\beta_1+\frac{dS_1}{d\gamma}\gamma_1=0$$

$$\frac{dS_2}{d\alpha}\alpha_1+\frac{dS_2}{d\beta}\beta_1+\frac{dS_2}{d\gamma}\gamma_1=0$$

$$A\alpha_1+B\beta_1+C\gamma_1=0$$

zu ermitteln. Dabei repräsentirt die letztere Gleichung (ohne Indices genommen) die gegebene Gerade, resp. den gegebenen Punkt. Wegen der Homogeneität der drei Gleichungen folgt

$$\begin{vmatrix} \frac{dS_1}{d\alpha}, & \frac{dS_1}{d\beta}, & \frac{dS_1}{d\gamma} \\ \frac{dS_2}{d\alpha}, & \frac{dS_2}{d\beta}, & \frac{dS_2}{d\gamma} \\ A, & B, & C \end{vmatrix} = 0$$

für die Gleichung der gesuchten Curve. Da hierin die Differentialquotienten vom ersten Grade sind, so wird die Gleichung eine solche 2ten Grades sein, demnach einen Kegelschnitt darstellen.

Wenn zwei Kegelschnitte und ein Punkt gegeben sind, so gehen die reciproken Polaren des gegebenen Punktes in Bezug auf die beiden Kegelschnitte in gerade Linien über, und zwar in die beiden geradlinigen Polaren des gegebenen Punktes. Es lässt sich eine Tangente der neuen Curve leicht construiren, wenn man durch den gegebenen Punkt eine beliebige Gerade zieht und zu derselben nach der bekannten Weise die Pole in Bezug auf die beiden gegebenen Kegelschnitte ermittelt. Die Verbindungslinie dieser Pole ist die gesuchte Tangente.

Wenn zwei Kegelschnitte und eine Gerade gegeben sind, so gehen die reciproken Polaren dieser Linie in Bezug auf die beiden Kegelschnitte in zwei Punkte über, d. h. in die beiden Pole der geraden Linie. Ein Punkt der neuen Curve lässt sich leicht construiren, wenn man zu einem beliebigen Punkte der gegebenen Geraden die Polaren in Bezug auf die beiden gegebenen Kegelschnitte ermittelt. Der Durchschnittspunkt der beiden Polaren ist der gesuchte Punkt.

§ 4.

Anwendung auf ein System von Kreisen für Cartesische Coordinaten.

In den bisherigen Untersuchungen wurden den allgemeinen Gleichungen der Kegelschnitte die Dreilinien- und Dreipunktcoordinatensysteme zu Grunde gelegt, weil wegen der Homogenität der Gleichungen allgemeine Untersuchungen sich leichter mit Hülfe solcher Coordinatensysteme führen lassen. Da wir es in der Folge mit einer speciellen Gattung von Kegelschnitten zu thun haben werden, so wird es vortheilhafter sein, die Cartesischen Coordinaten anzuwenden. Wir betrachten dabei diese Coordinaten als einen speciellen Fall der Dreiliniencoordinaten, indem wir eine der drei Variablen der allgemeinen homogenen Gleichung der Einheit gleichsetzen, während wir die beiden anderen in die rechtwinkligen x- und y-Coordinaten übergehen lassen.

Es soll untersucht werden, welche Curven sich ergeben, wenn man die Kegelschnitte in Kreise übergehen lässt. Sind zwei Kreise in Cartesischen Punktcoordinaten durch ihre Gleichungen

$$S_1 \equiv (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2 = 0$$
$$S_1 \equiv (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r_2^2 = 0$$

gegeben, so stellt bekanntlich die Gleichung

$$S_1 + k S_2 = 0$$

die Gesammtheit der Kreise dar, welche durch die Schnittpunkte der beiden gegebenen Kreise gehen. Wird $k = -1$, so stellt die Gleichung eine gerade Linie dar. Diese Gerade, welche durch die Schnittpunkte der beiden Kreise geht, wird Chordale oder Radicalaxe genannt. Der Einfachheit halber nehmen wir die Chordale als y-Axe und die Verbindungslinie der Kreismittelpunkte als x-Axe an. Die Gleichung eines belie-

bigen Individuums des Systems von Kreisen, die durch zwei feste Punkte gehen, lautet dann

$$x^2 + y^2 - 2kx \pm \delta^2 = 0.$$

Hierbei bleibt δ für alle Kreise des Systems constant, während k variirt. Für positives δ^2 schneidet die Chordale die Kreise in imaginären, für negatives δ^2 in reellen Punkten. Wird $\delta = 0$, so berühren die Kreise einander, wobei die Chordale die gemeinsame Tangente ist. Die veränderliche Grösse k bedeutet den Abstand des Mittelpunktes eines Kreises von der Chordalen. Nach den früheren Untersuchungen müssen die Polaren eines beliebigen Punktes in Bezug auf die Gesammtheit der Kreise, welche sich in zwei festen Punkten schneiden, durch einen festen Punkt gehen. Die Coordinaten dieses Punktes ermitteln sich, wie folgt. Die Gleichung eines Individuums des Kreisbüschels lautet in homogener Form

$$x^2 + y^2 - 2kxz \pm \delta^2 z^2 = 0.$$

Die Polare eines Punktes x_1, y_1, z_1 in Bezug auf diesen Kreis hat die Gleichung

$$(2x_1 - 2kz)x + 2y_1 . y + (-2kx_1 \pm 2\delta^2 z_1)z = 0$$

oder, wenn man $z = 1$ setzt

$$x_1 x + y_1 y - k(x + x_1) \pm \delta^2 = 0.$$

Diese Linie geht durch den Durchschnittspunkt der beiden Geraden

$$x_1 x + y_1 y \pm \delta^2 = 0$$
$$x_1 + x = 0.$$

Hieraus erhalten wir für die Coordinaten dieses Punktes die Werthe

$$x = -x_1$$
$$y = \frac{x_1^2 \pm \delta^2}{y_1}$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen ist ersichtlich, dass der Punkt, durch welchen die Polaren hindurchgehen und der gegebene Punkt auf verschiedenen Seiten der Chordalen liegen

und zwar in gleichem Abstande von dieser Linie. Der gegebene Punkt bestimmt ein Individuum des Systems der Kreise. Die Polare des gegebenen Punktes in Bezug auf diesen Kreis fällt aber mit der Tangente zusammen, auf welcher somit der gesuchte Punkt liegen muss. Demnach erhält man folgende Construction für den Punkt, durch welchen die Polaren des gegebenen Punktes hindurchgehen. Man beschreibt einen Kreis, der durch die beiden festen Punkte des Systems und durch den gegebenen Punkt geht und zieht in letzterem eine Tangente an den Kreis. Eine der Chordalen parallele und von dieser Linie in gleichem Abstande und auf entgegengesetzter Seite wie der gegebene Punkt gelegene Gerade schneidet obige Tangente in dem gesuchten Punkt. Durchläuft nun der Punkt x_1, y_1 eine beliebige Curve, so hat man für eine hinreichende Anzahl von Punkten derselben nach obiger Methode die entsprechenden Punkte zu suchen, durch welche die Polaren in Bezug auf die Gesammtheit der Kreise hindurchgehen. Die Aufeinanderfolge der so construirten Punkte ergibt die gesuchte Curve.

§ 5.

Specielle Fälle.

Von den zahlreichen Curven, welche man als Leitcurven benutzen kann, mögen nur einige wenige herausgegriffen und für dieselben die fragliche Curve untersucht werden.

1) Nimmt man zur Leitcurve eine Gerade, so ist die neue Curve ein Kegelschnitt. Die Gleichung der Geraden sei

$$ax+by+c=0,$$

so wird die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts aus den drei Gleichungen

$$x + x_1 = 0$$
$$x_1 x + y_1 y \pm \delta^2 = 0$$
$$a x_1 + b y_1 + c = 0$$

durch Elimination von x_1, y_1 ermittelt. Die Einführung von

$$x_1 = -x, \quad y_1 = \frac{x^2 \pm \delta^2}{y}$$

in die dritte Gleichung ergibt:

$$b x^2 - a x y + c y \pm b \delta^2 = 0.$$

Nach dem bekannten Kriterium stellt diese Gleichung eine Hyperbel dar. Wird $a = 0$, so geht obige Gleichung in diejenige einer Parabel über. Die Gleichung der gegebenen Geraden lautet für diesen Fall

$$b y + c = 0.$$

Es entsteht somit eine Parabel, wenn die Leitlinie der x-Axe parallel läuft.

Setzt man als Leitlinie eine Gerade, parallel der y-Axe, voraus, etwa von der Gleichung

$$x = c,$$

so wird die gesuchte Gleichung nach der Elimination von x_1 aus den Gleichungen

$$x + x_1 = 0 \text{ und } y_1 = c$$

lauten

$$x = -c;$$

d. h. der Kegelschnitt geht in eine Gerade über, welche, in gleichem Abstande von der y-Axe wie der gegebene Punkt, dieser Axe parallel läuft. Da aber ein Kegelschnitt, wenn er zerfällt, stets in zwei Geraden zerfallen muss, so ist nothwendig noch eine zweite Gerade vorhanden, welche den Ort der Durchschnittspunkte der Polaren darstellt. In der That findet man dieselbe, wenn man für die unendlich fernen Punkte der gegebenen Geraden die Durchschnittspunkte der Polaren sucht. Da die Polaren dieser Punkte mit der x-Axe zusammenfallen, so wird diese Gerade die gesuchte sein.

Nimmt man die y-Axe selbst als Leitlinie an, so wird die gesuchte Curve die Gleichung

$$x = 0$$

annehmen. Dieselbe stellt die y-Axe selbst, d. h. die Chordale dar. Wir erhalten somit folgende merkwürdige Eigenschaft dieser Linie: »Die Polaren eines Punktes der Chordalen zweier Kreise in Bezug auf diese Kreise schneiden sich wieder in einem Punkte der Chordalen«. Aus der Theorie von Pol und Polaren lässt sich leicht nachweisen, dass der gegebene Punkt und der Durchschnittspunkt der Polaren das eine Paar, sowie die beiden Schnittpunkte der Kreise das andere Paar conjugirter harmonischer Punkte sind. Es ergibt sich dies auch aus der Gleichung

$$y = \frac{x_1^2 \mp \delta^2}{y_1},$$

wenn man in derselben $x_1 = 0$ setzt. Es folgt

$$y\, y_1 = \mp \delta^2,$$

welche Gleichung die Bedingung dafür ist, dass die erwähnten 4 Punkte in harmonischer Beziehung stehen.

Für die Folge wollen wir annehmen, dass die Kreise sich sämmtlich in einem Punkte berühren. Die Gleichung, welche die Gesammtheit der Kreise repräsentirt, wird dann, da für diesen Fall $\delta = 0$ ist, in die folgende übergehen:

$$x^2 + y^2 - 2kx = 0.$$

Der Durchschnittspunkt der Polaren ist durch die Gleichungen

$$x + x_1 = 0$$
$$x_1 x + y_1 y = 0$$

bestimmt.

2) Der Punkt x_1, y_1 durchlaufe irgend ein Individuum des Systems selbst:

$$x^2 + y^2 - 2kx = 0$$

Die fragliche Curve wird durch Einsetzung von

$$x_1 = -x \quad y_1 = \frac{x^2}{y}$$

in die Gleichung:

$$x_1^2 + y_1^2 - 2kx_1 = 0$$

ermittelt:

$$xy^2 + x^3 + 2ky^2 = 0,$$

oder

$$x^3 = -y^2(2k + x).$$

Dieses ist die Gleichung der Cissoide. Nach den früheren Untersuchungen über die Construction von Curvenpunkten lässt sich demnach die Cissoide folgendermassen construiren: In dem Endpunkte o (Fig. 6) des Durchmessers eines Kreises wird eine Tangente gezogen. Von dem Berührungspunkte p einer beliebigen anderen Tangente wird eine Senkrechte auf den festen Durchmesser gefällt und das Stück op_1 nach om_1 abgetragen. Eine Senkrechte in m_1 schneidet die Tangente in einem Punkte der Cissoide.

3) Als Leitcurve sei ein Kreis gewählt, welcher die x-Axe im Coordinatenanfang berührt. Die Gleichung dieses Kreises lautet:

$$x^2 + y^2 - 2ky = 0.$$

Durch Einsetzung von

$$x_1 = -x, \quad y_1 = \frac{x^2}{y}$$

in die Gleichung

$$x_1^2 + y_1^2 - 2ky_1 = 0$$

erfolgt:

$$x^2 + y^2 - 2ky = 0.$$

Es ist dieses wieder die Gleichung des gegebenen Kreises. Die Durchschnittspunkte der Polaren von Punkten eines Kreises in Bezug auf ein System von Kreisen, welche den gegebenen Kreis in einem Punkte rechtwinklig schneiden, liegen wieder auf dem gegebenen Kreise.

4) Als Leitcurve sei endlich eine Parabel angenommen, welche die gemeinsame Berührungslinie des Systems der Kreise zur Scheiteltangente und den Berührungspunkt zum Scheitel

hat. Der Ort der Durchschnittspunkte der Polaren wird durch die Substitution von

$$x_1 = -x, \quad y_1 = \frac{x^2}{y}$$

in die Gleichung $y_1^2 = 2\,p\,x_1$

gefunden. Man erhält

$$x^3 = -2\,k\,y^2$$

oder $$y^2 = -\frac{1}{2\,k}\,x^3.$$

Diese Gleichung repräsentirt eine semicubische Parabel. Dieselbe liegt in Bezug auf die y-Axe auf entgegengesetzter Seite, wie die gegebene Parabel, welcher die semicubische ihren Ursprung verdankt.

Die Gleichungen von andern bekannten Curven, wie der Conchoide, Cardiode, Lemniscate etc., lassen sich ebenfalls wie diejenigen der erwähnten Curven ableiten, allein es sind Curven höherer Ordnung als Leitlinien vorauszusetzen.

§ 6.

Anwendung auf zwei Kreise für Geradencoordinaten.

Den letzteren Untersuchungen in Punktcoordinaten sind solche in Geradencoordinaten gegenüber zu stellen. Bezeichnet man die reciproken Werthe der Abschnitte einer beweglichen Geraden auf zwei rechtwinkligen Axen mit u und v, so stellt eine Function von u und v eine Curve dar, welche von der beweglichen Geraden eingehüllt wird. Die Gleichung ersten Grades

$$a\,u + b\,v - 1 = 0$$

repräsentirt einen Punkt, dessen Abstände von der u- und v-Axe a, resp. b sind. Eine Gleichung 2ten Grades in u und v repräsentirt einen Kegelschnitt.

Wir haben früher gesehen, dass die Gleichung in Cartesischen Punktcoordinaten sich leicht durch Substitution einer Lineareinheit in eine homogene Gleichung verwandeln lässt, und dass das System der Cartesischen Punktcoordinaten nur ein specieller Fall des Dreiliniensystems ist. Analog diesem ist zwar auch in Geradencoordinaten die Gleichung eines Punktes durch die Substitution einer dritten Variablen in eine homogene Gleichung verwandelbar, indessen trifft die analoge Folgerung, dass die Gleichung in genannten Coordinaten ein specieller Fall derjenigen im Dreipunktsystem sei, hier nicht zu. Denn die Gleichung Const. $= 0$ hat im Dreipunktsystem keine derselben Gleichung im Dreiliniensysem analoge Bedeutung. Näheres hierüber Salmon, Analyt. Geom. der Ebene. Somit wird über die speciellen Fälle von Gleichungen in Geradencoordinaten eine eigene Untersuchung zu führen sein.

Wenn $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ die Gleichungen zweier Kegelschnitte bedeuten, so stellt die Gleichung

$$S_1 + k S_2 = 0$$

auch in den erwähnten Geradencoordinaten wieder einen Kegelschnitt dar, welcher die den beiden Kegelschnitten gemeinsamen 4 Tangenten berührt.

Werden die beiden Kegelschnitte zu Kreisen, so repräsentirt die Gleichung

$$S_1 + k S_2 = 0$$

nicht ein System von Kreisen, welche 4 feste Geraden berühren; denn ein solches System ist nicht möglich, da bekanntlich schon drei Geraden eine beschränkte Anzahl von Kreisen bestimmen.

Die Gleichung $S_1 + k S_2 = 0$ stellt somit einen beliebigen Kegelschnitt dar, welcher die 4 gemeinsamen Tangenten der beiden gegebenen Kreise berührt. Unsere Untersuchungen betreffen daher lediglich die beiden gegebenen Kreise und nicht etwa ein System von Kreisen.

Allgemein lautet die Gleichung eines Kreises

$$S \equiv \varrho^2 (u^2 + v^2) - (au + bv - 1)^2 = 0,$$

worin ϱ den Radius des Kreises, a und b die Abstände des Mittelpunktes von der u-, resp. v-Axe bedeuten. Der zweite Theil der Gleichung, gleich Null gesetzt

$$au + bv - 1 = 0,$$

repräsentirt den Mittelpunkt des Kreises. Wenn u_1, v_1 die Coordinaten einer beliebigen Geraden sind, so lautet die Gleichung des Pols in Bezug auf den Kreis:

$$\varrho^2 (u_1 u + v_1 v) - (au_1 + bv_1 - 1)(au + bv - 1) = 0.$$

Führt man analog dem früheren Verfahren eine neue Variable w ein, indem man der Gleichung des Kreises die Form

$$S \equiv \varrho^2 (u^2 + v^2) - (au + bv - w)^2 = 0$$

gibt, so erhält man für die Gleichung des Pols:

$$\varrho^2 (u_1 u + v_1 v) - (au_1 + bv_1 - w)(au + bv - w) = 0.$$

Letztere Gleichung lässt sich in folgender Form schreiben

$$\big(2\varrho^2 u - 2a(au + bv - w)\big)u_1 + \big(2\varrho^2 v - 2b(au + bv - w)\big)v_1 + 2(au + bv - w)w_1 = 0$$

oder

$$\frac{dS}{du} u_1 + \frac{dS}{dv} v_1 + \frac{dS}{dw} w_1 = 0.$$

Diese Gleichung stimmt somit mit der früheren allgemeinen im Dreipunktsystem überein. Die Verbindungslinie der Pole einer gegebenen Geraden in Bezug auf die beiden Kreise umhüllt eine Curve, wenn man die gegebene Gerade ebenfalls eine Curve umhüllen lässt.

Wenn die gegebene Gerade in allen ihren Lagen durch einen Punkt geht, welcher durch die Gleichung

$$Au + Bv + C = 0$$

bestimmt sei, so umhüllt die Verbindungslinie der Pole einen Kegelschnitt. Die Gleichung wird durch Elimination von u_1, v_1, w_1 aus den drei homogenen Gleichungen

$$\frac{dS_1}{du} u_1 + \frac{dS_1}{dv} v_1 + \frac{dS_1}{dw} w_1 = 0$$

$$\frac{dS_2}{du} u_1 + \frac{dS_2}{dv} v_1 + \frac{dS_2}{dw} w_1 = 0$$

$$Au_1 + Bv_1 + Cw_1 = 0$$

ermittelt.

§ 7.

Specielle Untersuchung für die Ähnlichkeitspunkte.

Von den zahlreichen Punkten, welche man zu Grunde legen kann, wollen wir nur einige herausgreifen und für dieselben die Untersuchung führen. Es geschehe dies für die »Ähnlichkeitspunkte« zweier gegebenen Kreise. Diesen Punkten im System der Geradencoordinaten entspricht im System der Punktcoordinaten die Chordale zweier Kreise.

Die Gleichungen der beiden Kreise transformiren wir derart, dass die Centrallinie zur u-Axe wird. Es ist dann $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, und die Gleichungen der Kreise lauten

$$\varrho_1^2 (u^2 + v^2) - (a_1 u - 1)^2 = 0$$

$$\varrho_2^2 (u^2 + v^2) - (a_2 u - 1)^2 = 0$$

Wir führen ferner die Bezeichnung

$$P_1 = a_1 u - 1$$

$$P_2 = a_2 u - 1$$

ein, multipliciren die Gleichung des ersten Kreises mit ϱ_2^2, die des zweiten mit ϱ_1^2 und subtrahiren:

$$\varrho_2^2 P_1^2 - \varrho_1^2 P_2^2 = 0$$

oder

$$(\varrho_2 P_1 + \varrho_1 P_2)(\varrho_2 P_1 - \varrho_1 P_2) = 0$$

Die Gleichung zerfällt in die linearen

$$\varrho_2 P_1 + \varrho_1 P_2 = 0$$

$$\varrho_2 P_1 - \varrho_1 P_2 = 0.$$

Die Coordinaten der gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise erfüllen eine oder die andere dieser beiden Gleichungen. Dieselben stellen somit zwei Durchschnittspunkte der gemeinsamen Tangenten dar, und zwar liegen diese Punkte auf der Centralen der beiden Kreise, da $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ die Gleichungen der beiden Mittelpunkte sind. Die Punkte mögen q_1 und q_2 heissen. Setzt man für P_1 und P_2 die Werthe wieder ein, so ergibt sich

$$u = \frac{\varrho_2 + \varrho_1}{a_1 \varrho_2 + a_2 \varrho_1}$$

und

$$u = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{a_1 \varrho_2 - a_2 \varrho_1}$$

Die Strecke $p_1 p_2$ wird von den Punkten q_1 und q_2 in den Verhältnissen

$$q_1 p_1 : q_1 p_2 = -\varrho_1 : \varrho_2$$
$$q_2 p_1 : q_2 p_2 = \varrho_1 : \varrho_2 ,$$

d. h. im Verhältniss der Radien getheilt. Die beiden Punkte q_1 und q_2 werden die Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise genannt.

Es soll nun die Gleichung der Curve ermittelt werden, welche von den Verbindungslinien der entsprechenden Pole der durch einen der beiden Ähnlichkeitspunkte gehenden Geraden eingehüllt wird.

Die homogenen Coordinaten einer durch den Ähnlichkeitspunkt q_1 gehenden Geraden mögen u_1, v_1, w_1 lauten, so folgt für die Gleichungen der Pole in Bezug auf die Kreise:

$$\left(\varrho_1^2 u - a_1 (a_1 u - w)\right) u_1 + \varrho_1^2 v \,.\, v_1 + (a_1 u - w) w_1 = 0$$

$$\left(\varrho_2 u - a_2 (a_2 u - w)\right) u_1 + \varrho_2^2 v \,.\, v_1 + (a_2 u - w) w_1 = 0.$$

Die Gleichung der gesuchten Curve erhält man durch Elimination von u_1, v_1, w_1 aus diesen beiden Gleichungen und der Gleichung

$$(a_1 \varrho_2 - a_2 \varrho_1) u_1 - (\varrho_2 - \varrho_1) w_1 = 0.$$

Wegen der Homogeneität der drei Gleichungen ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} (\varrho_1^2 - a_1^2)u + a_1 w & , & \varrho_1^2 v & , & a_1 u - w \\ (\varrho_2^2 - a_2^2)u + a_2 w & , & \varrho_2^2 v & , & a_2 u - w \\ a_1\varrho_2 - a_2\varrho_1 & , & 0 & , & \varrho_1 - \varrho_2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn man die Variable w gleich der Einheit setzt:

$$\begin{vmatrix} (\varrho_1^2 - a_1^2)u + a_1 & , & \varrho_1^2 v & , & a_1 u - 1 \\ (\varrho_2^2 - a_2^2)u + a_2 & , & \varrho_2^2 v & , & a_2 u - 1 \\ a_1\varrho_2 - a_2\varrho_1 & , & 0 & , & \varrho_1 - \varrho_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Den Coordinatenanfang verschieben wir nun in den Ähnlichkeitspunkt q_1. Da in diesem Falle

$$a_1\varrho_2 - a_2\varrho_1 = 0$$

ist, so erfolgt

$$(\varrho_1 - \varrho_2)\begin{vmatrix} (\varrho_1^2 - a_1^2)u + a_1 & , & \varrho_1^2 v \\ (\varrho_2^2 - a_2^2)u + a_2 & , & \varrho_2^2 v \end{vmatrix} = 0.$$

Die Differenz $\varrho_1 - \varrho_2$ verschwindet im Allgemeinen nicht, somit ist die Determinante allein gleich Null zu setzen. Wir erhalten

$$1) \quad v = 0$$

$$2) \quad \big((\varrho_1^2 - a_1^2)u + a_1\big)\varrho_2^2 - \big((\varrho_2^2 - a_2^2)u + a_2\big)\varrho_1^2 = 0,$$

oder

$$(\varrho_1^2 a_2^2 - \varrho_2^2 a_1^2)u + a_1\varrho_2^2 - a_2\varrho_1^2 = 0,$$

und hieraus

$$u = \frac{\varrho_1^2 a_2 - \varrho_2^2 a_1}{\varrho_1^2 a_2^2 - \varrho_2^2 a_1^2}$$

Wegen

$$\varrho_1 a_2 = \varrho_2 a_1$$

folgt hieraus die Gleichung

$$u = \infty.$$

Dieselbe repräsentirt den Coordinatenanfang, d. h. den Ähnlichkeitspunkt q_1 selbst.

Wir gelangen zu demselben Resultat für den zweiten Ähnlichkeitspunkt, wenn wir die gleiche Untersuchung für diesen Punkt anstellen. Somit haben diese beiden Punkte

folgende merkwürdige Eigenschaft: »Die Verbindungslinie der Pole einer durch einen Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise gehenden Geraden in Bezug auf diese beiden Kreise geht wieder durch den Ähnlichkeitspunkt«. Es ist dies das Analogon zu dem Satze über die Chordalen, dass die Polaren eines Punktes dieser Linie in Bezug auf die beiden Kreise sich wieder in einem Punkte der Chordalen schneiden.

Die andere Gleichung $v = 0$ stellt den unendlich fernen Punkt der v-Axe dar. Die Pole der Centralen, welche Linie ja durch beide Ähnlichkeitspunkte geht, liegen nämlich im Unendlichen dieser Axe.

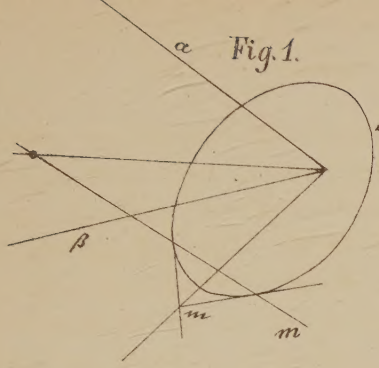

Fig. 1.

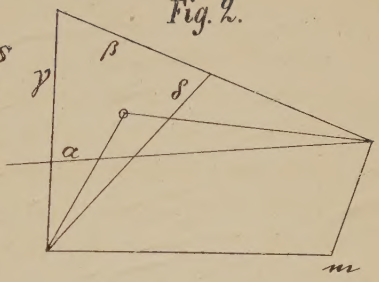

Fig. 2.

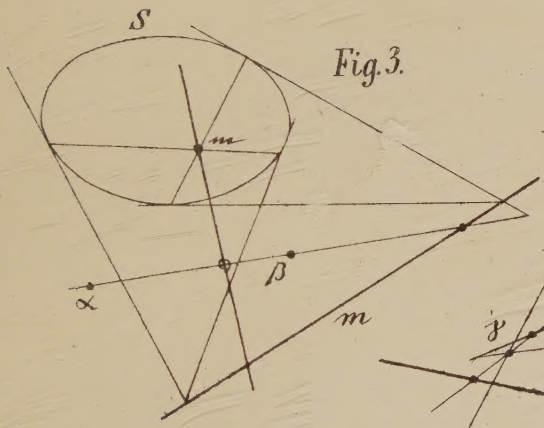

Fig. 3.

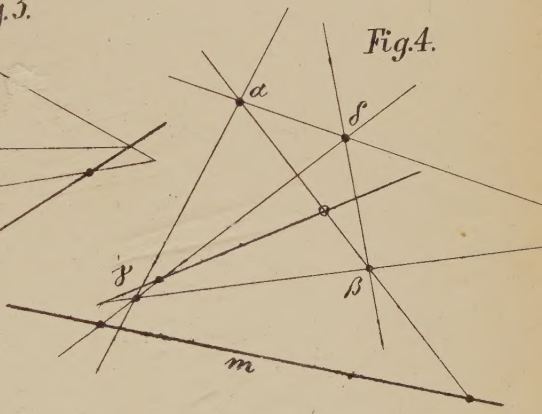

Fig. 4.

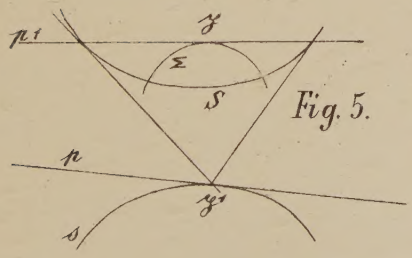

Fig. 5.

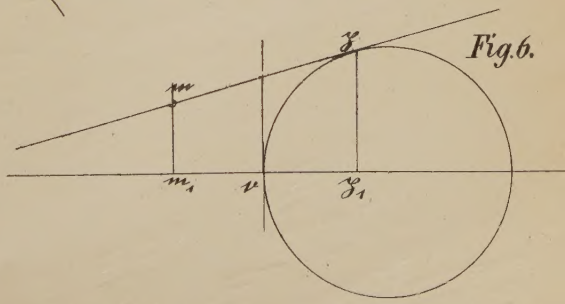

Fig. 6.